DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

Notations et objectif du problème

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles de classe C^∞ sur le segment $J = [0, 1]$, muni de la norme $g \longmapsto N_\infty(g) = \sup_{t \in [0,1]} |g(t)|$, et par F le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions f telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$.

Étant donné un élément g de E et un couple (a, b) de nombres réels, on se propose d'étudier un algorithme d'approximation de la solution du problème aux limites

$$(1) \qquad \begin{cases} y'' = g \\ y(0) = a \quad \text{et} \quad y(1) = b, \end{cases}$$

c'est-à-dire de la solution de l'équation différentielle $y'' = g$ satisfaisant aux conditions aux limites $y(0) = a$ et $y(1) = b$.

1. Étude de la solution du problème aux limites (1)

a. En observant que les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto x - 1$ constituent une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation $y'' = 0$ et en appliquant la méthode de variation des constantes, montrer que, pour tout élément g de E, il existe un élément f de F et un seul tel que $f'' = g$, et que, pour tout point x de $[0, 1]$,

$$f(x) = x \int_x^1 (t - 1)\, g(t)\, dt + (x - 1) \int_0^x t\, g(t)\, dt.$$

b. Prouver que, pour tout point x de $[0, 1]$,

$$|f(x)| \leqslant \frac{x(1 - x)}{2} N_\infty(g).$$

c. Montrer que l'application U qui à tout élément g de E associe f est un endomorphisme continu de E et que $\|U\| \leqslant \frac{1}{8}$. Par un choix convenable de g, prouver que $\|U\| = \frac{1}{8}$.

d. Prouver que, pour tout élément g de E et pour tout couple (a, b) de nombres réels, le problème aux limites (1) admet une solution φ et une seule, et expliciter $\varphi - U(g)$.

Montrer enfin que

$$N_\infty(\varphi) \leqslant \frac{1}{8} N_\infty(g) + \sup(|a|, |b|).$$

2. Discrétisation du problème aux limites précédent

Dans toute la suite du problème, pour tout entier naturel non nul n, on pose $h = \frac{1}{n + 1}$ et note J_h la subdivision à pas constant $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ de $[0, 1]$, où pour tout entier p tel que $0 \leqslant p \leqslant n + 1$, $x_p = ph$; en particulier $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 1$.

a. Soient y un élément de E et x un point de $[h, 1 - h]$.

Évaluer $y(x + h)$ et $y(x - h)$ au moyen de la formule de Taylor à l'ordre 3 appliquée à y au point x.

b. En déduire que

$$y''(x) = \frac{1}{h^2}[y(x + h) + y(x - h) - 2y(x)] + R(x, h), \quad \text{où} \quad |R(x, h)| \leqslant \frac{h^2}{12} N_\infty(D^4 y),$$

$D^4 y$ désignant la dérivée quatrième de y.

Ceci conduit, pour trouver des valeurs approchées de la solution de (1) aux points x_p, à introduire la restriction w de y à J_h et à remplacer le problème aux limites (1) par le système linéaire approché :

$$(2) \qquad \begin{cases} \frac{1}{h^2}[w(x_{p+1}) + w(x_{p-1}) - 2w(x_p)] = g(x_p) \quad \text{si} \quad 1 \leqslant p \leqslant n \\ w(0) = a \quad \text{et} \quad w(1) = b. \end{cases}$$

Tournez la page S. V. P.

3. Étude du problème aux limites discret (2)

On désigne par E_h l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles définies sur J_h, muni de la norme $v \longmapsto N_\infty(v) = \sup_{0 \leqslant p \leqslant n+1} |v(x_p)|$, et par F_h le sous-espace vectoriel de E_h constitué des fonctions u telles que $u(0) = 0$ et $u(1) = 0$.

On note L_h l'endomorphisme de E_h qui, à tout élément w, associe l'élément $L_h(w)$ défini par les relations :

$$(3) \quad \begin{cases} L_h(w)(x_p) = \dfrac{1}{h^2}\left[w(x_{p+1}) + w(x_{p-1}) - 2w(x_p)\right] & \text{si } 1 \leqslant p \leqslant n. \\ L_h(w)(0) = w(0) \quad \text{et} \quad L_h(w)(1) = w(1). \end{cases}$$

Dans ces conditions, le système (2) s'écrit :

$$L_h(w) = v, \quad \text{où} \quad v(x_p) = g(x_p) \quad \text{si} \quad 1 \leqslant p \leqslant n, \quad v(0) = a \quad \text{et} \quad v(1) = b.$$

a. Soit w un élément de E_h tel que, pour tout p appartenant à $[1, n]$, $L_h(w)(x_p) \geqslant 0$. Montrer que w atteint son maximum au point $x_0 = 0$ ou au point $x_{n+1} = 1$. (On pourra considérer, parmi les points de J_h où w atteint son maximum, celui de plus grande abscisse, que l'on notera x_r, et on supposera par l'absurde que $1 \leqslant r \leqslant n$.)

b. Énoncer et prouver un résultat analogue lorsque, pour tout entier p tel que $1 \leqslant p \leqslant n$, $L_h(w)(x_p) \leqslant 0$.

c. En déduire le noyau de L_h. Prouver que le système (2) admet une solution φ_h et une seule.

d. Montrer que le sous-espace vectoriel F_h est stable par L_h et que pour tout élément w de F_h, la relation $L_h(w) \geqslant 0$ implique la relation $w \leqslant 0$.

En déduire que L_h induit un automorphisme de F_h. Soit U_h l'inverse de cet automorphisme; ainsi, pour tout élément v de F_h, $u = U_h(v)$ est l'unique élément de F_h tel que $L_h(u) = v$.

4. Stabilité du problème aux limites discret (2)

a. Soit s la fonction définie sur J_h par la relation $s(x) = \dfrac{1}{2}x(1 - x)$.

Montrer que s appartient à F_h et calculer $L_h(s)$.

b. Soient v un élément de F_h et $u = U_h(v)$. Prouver que $L_h(u - N_\infty(v)\, s) \geqslant 0$ et que $L_h(u + N_\infty(v)\, s) \leqslant 0$.

En déduire que, pour tout élément x de J_h, $|u(x)| \leqslant \dfrac{x(1-x)}{2} N_\infty(v)$.

Montrer que $\|U_h\| = \dfrac{1}{8}$.

c. Soit ψ_h l'unique élément de E_h tel que $L_h(\psi_h)(x_p) = 0$ si $1 \leqslant p \leqslant n$, $\psi_h(0) = a$ et $\psi_h(1) = b$.
Montrer que $N_\infty(\psi_h) \leqslant \sup(|a|, |b|)$.

d. Soit φ_h la solution du problème (2).

À l'aide de *b.* et *c.*, prouver que $N_\infty(\varphi_h) \leqslant \dfrac{1}{8} N_\infty(g) + \sup(|a|, |b|)$.

5. Qualité de l'approximation du problème aux limites (1)

Soient φ la solution de (1), χ_h la restriction de φ à J_h et φ_h l'unique solution du problème discrétisé (2).

a. Prouver que $u_h = \chi_h - \varphi_h$ appartient à F_h et calculer $v_h = L_h(u_h)$.

b. Montrer, à l'aide de 2. *b.*, que $N_\infty(v_h) \leqslant \dfrac{h^2}{12} N_\infty(g'')$.

c. En déduire que $N_\infty(\chi_h - \varphi_h) \leqslant \dfrac{h^2}{96} N_\infty(g'')$.

Ainsi, lorsque le pas h de la subdivision est assez petit, φ_h fournit une bonne approximation de φ aux points de la subdivision J_h.

Tournez la page S. V. P.

6. Étude d'un algorithme d'approximation de la solution du problème discret (2)

On note $E_h(a, b)$ l'ensemble des éléments w de E_h tels que $w(0) = a$ et $w(1) = b$.

a. Soit w un élément de $E_h(a, b)$. Montrer que w est solution du problème (2) si et seulement si $A_h(w) = w$, où A_h est l'application de $E_h(a, b)$ dans lui-même définie par

$$(4)\qquad \begin{cases} A_h(w)(x_p) = \dfrac{1}{2}\left[w(x_{p+1}) + w(x_{p-1})\right] - \dfrac{h^2}{2} g(x_p) \quad \text{si} \quad 1 \leqslant p \leqslant n. \\ A_h(w)(0) = a \quad \text{et} \quad A_h(w)(1) = b. \end{cases}$$

b. Soient w et w' des éléments de $E_h(a, b)$. Prouver que $w' - w$ appartient à F_h et que

$$(5)\qquad A_h(w') - A_h(w) = T_h(w' - w),$$

où T_h est l'endomorphisme de F_h défini par les relations

$$(6)\qquad \begin{cases} T_h(u)(x_p) = \dfrac{1}{2}\left[u(x_{p+1}) + u(x_{p-1})\right] \quad \text{si} \quad 1 \leqslant p \leqslant n \\ T_h(u)(0) = 0 \quad \text{et} \quad T_h(u)(1) = 0. \end{cases}$$

En déduire que A_h est lipschitzienne dans le rapport $\| T_h \|$.

Montrer plus généralement que, pour tout entier $k \geqslant 1$, l'application A_h^k obtenue en composant k fois A_h est lipschitzienne dans le rapport $\| T_h^k \|$.

c. On munit l'espace vectoriel F_h du produit scalaire

$$(u \mid v) = \sum_{p=1}^{n} u(x_p)\, v(x_p) \qquad \text{et de la norme } u \longmapsto N_2(u) \text{ associée.}$$

Montrer que T_h est un endomorphisme symétrique de F_h.

d. On pose $\rho_h = \sup_{\lambda \in S} |\lambda|$, où S désigne l'ensemble des valeurs propres de T_h. Montrer que, pour tout élément u de F_h, et pour tout entier $k \geqslant 1$, $N_2(T_h^k(u)) \leqslant \rho_h^k N_2(u)$.

En déduire que $N_\infty(T_h^k(u)) \leqslant \sqrt{n}\, \rho_h^k N_\infty(u)$.

e. Soit λ une valeur propre de T_h et u un vecteur propre associé. Montrer qu'il existe un entier r appartenant à $[1, n]$, tel que $|u|$ atteigne son maximum au point x_r, et satisfaisant à l'une au moins des conditions suivantes :

$$|u(x_{r-1})| < |u(x_r)| \quad \text{ou} \quad |u(x_{r+1})| < |u(x_r)|.$$

En conclure que $|\lambda| < 1$ et que, par suite, $\rho_h < 1$.

f. Soit c l'élément de $E_h(a, b)$ défini par les relations $c(x_p) = a$ si $0 \leqslant p \leqslant n$ et $c(1) = b$. On considère la suite (w_k) d'éléments de $E_h(a, b)$ définie par la relation de récurrence $w_{k+1} = A_h(w_k)$ et la condition initiale $w_0 = c$. Prouver que, pour tout entier $k \geqslant 1$

$$N_\infty(w_k - \varphi_h) \leqslant \sqrt{n}\, \rho_h^k N_\infty(c - \varphi_h), \quad \text{où} \quad N_\infty(c - \varphi_h) \leqslant \frac{1}{8} N_\infty(g) + \sup(|a|, |b|).$$

En particulier, la suite (w_k) converge géométriquement vers φ_h.